Για το παράδειγμα της ΑΒΕΖ ($\alpha = 0,05$)

Προέλευση Μεταβλητότητας	Αθροίσματα τετραγώνων	Βαθμ. Ελευθερ.	Μέσα Τετράγωνα
Δοκιμασίες	258	3	86,00
Υπόλοιπα	46	6	7,67
Ολ. Μεταβλητότητα	304	9	

Έτσι $F = \frac{MS_{tr}}{MS_{res}} = 11,2 > 4,76 = F_{0.05,3,6}$ άρα Απορρ. την H_0

Ανάλυση των μέσων τιμών

$Y_{ij} \sim N(\mu_j, \sigma^2) \Rightarrow \bar{Y}_{.j} \sim N(\mu_j, \frac{\sigma^2}{n_j})$

Για 2 δοκιμασίες u και v:

$\bar{Y}_{.u} - \bar{Y}_{.v} \sim N(\mu_u - \mu_v, \sigma^2(\frac{1}{n_u} + \frac{1}{n_v}))$

$$\frac{\frac{\bar{Y}_{.j} - \mu_j}{\sigma / \sqrt{n_j}} \sim N(0,1)}{\sqrt{\frac{SS_{res}}{\sigma^2} / (n-r) \sim \frac{\chi^2_{n-r}}{n_j - r}}} = \frac{\bar{Y}_{.j} - \mu_j}{\sqrt{MS_{res}/n_j}} \sim t_{n-r}$$

άρα ένα $(1-\alpha)100\%$ Δ.Ε. για το μ_j: $\bar{Y}_{.j} \pm t_{\alpha/2, n-r}\sqrt{\frac{MS_{res}}{n_j}}$

Μέθοδος της ελάχιστης σημαντικής διαφοράς

$$t = \frac{Y_{.u} - Y_{.v} - \cancel{(\mu_u - \mu_v)}^{0}}{\sqrt{MS_{res}(\frac{1}{n_u} + \frac{1}{n_v})}} \sim t_{n-r}$$

με $H_0: \mu_u - \mu_v = 0$ έναντι $H_\alpha: \mu_u - \mu_v \neq 0$

και κρ. περ. $|t| \geq t_{n-r}$

Για το πχ της ΑΒΕΖ, ενδιαφέρει αν $H_0: \mu_3 - \mu_4 = 0$ έναντι $H_\alpha: \mu_3 - \mu_4 \neq 0$

$$t = \frac{\bar{Y}_{.3} - \bar{Y}_{.4} - 0}{\sqrt{MS_{res}(\frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4})}}, \quad |t| \geq t_{\alpha/2, n-r} (= t_{0.025, 6} = 2,447)$$

$$t = \frac{19 - 27}{\sqrt{7,67(\frac{1}{3} + \frac{1}{4})}} = -3,164$$ όπως $|-3,164| > 2,447$ Απορρ. την H_0

$$E(MS_{res}) = E\left[\frac{1}{n-r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ij}-\bar{y}_{.j})^2\right]$$

$$= E\left[\frac{1}{n-r}\sum_{j=1}^{r}(n_j-1)\underbrace{\frac{1}{n_j-1}\sum_{i=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{.j})^2}_{=S_j^2}\right]$$

$$= E\left[\frac{1}{n-r}\sum_{j=1}^{r}(n_j-1)S_j^2\right] = \frac{1}{n-r}\sum_{j=1}^{r}(n_j-1)E(S_j^2)$$

$$\xlongequal{E(S_j^2)=\sigma^2} \frac{1}{n-r}\sum_{j=1}^{r}(n_j-1)\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\cancel{n-r}}\underbrace{\sum_{j=1}^{r}(\cancel{n_j-1})}_{n-r} = \sigma^2$$

$$MS_{tr} = \frac{SS_{tr}}{r-1}, \quad SS_{tr} = \sum_{j=1}^{r}\frac{y_{.j}^2}{n_j} - \frac{y_{..}^2}{n}$$

$$y_{ij} = \mu_j + \varepsilon_{ij} \sim N(\mu_j, \sigma^2)$$

$$E(SS_{tr}) = \sum_{j=1}^{r}\frac{E(y_{.j}^2)}{n_j} - \frac{E(y_{..}^2)}{n}$$

$$\left.\begin{aligned} E(y_{.j}) &= E\left(\sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n_j} E(y_{ij}) = \sum_{i=1}^{n_j}\mu_j = n_j\mu_j \\ Var(y_{.j}) &= \sum_{i=1}^{n_j} Var(y_{ij}) = \sum_{i=1}^{n_j}\sigma^2 = n_j\sigma^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(y_{.j}^2) = n_j\sigma^2 + (n_j\mu_j)^2$$

$$\left.\begin{aligned} E(y_{..}) &= \sum_j\sum_i E(y_{ij}) = \sum_j\sum_i \mu_j = \sum_{j=1}^{r} n_j\mu_j \xlongequal{\mu = \frac{\sum n_j\mu_j}{n}} n\mu \\ Var(y_{..}) &= \sum_j\sum_i Var(y_{ij}) = \sum_j\sum_i \sigma^2 = n\sigma^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(y_{..}^2) = n\sigma^2 + \mu^2 n^2$$

$$E(MS_{tr}) = \frac{1}{r-1}\left[\sum_{j}^{r} \frac{n_j\sigma^2 + n_j^2\mu_j^2}{n_j} - \frac{n\sigma^2 + n^2\mu^2}{n}\right] =$$

$$= \frac{1}{r-1}\left[\underbrace{\sum_j \sigma^2}_{=r\sigma^2} + \sum_j n_j \mu_j^2 - \sigma^2 - n\mu^2\right] =$$

$$= \sigma^2 + \frac{1}{r-1}\left[\sum_j n_j\mu_j^2 - n\mu^2\right] = \sigma^2 + \frac{1}{r-1}\sum_j n_j(\mu_j - \mu)^2$$

Άσκ. 6.3

Μέθοδοι Δίαιτας	25,2174	3	8,4056
Υπόλοιπο	18,08	19	0,9474
Σύνολο	43,2174	22	

$F = 8{,}87 > F_{0.05,3,19} = 3{,}13 \Rightarrow$ Υπάρχει διαφορά!

$H_0: \mu_4 - \mu_3 = 0$ έναντι $H_a: \mu_4 - \mu_3 > 0$

$$t = \frac{\overline{Y}_{.4} - \overline{Y}_{.3}}{\sqrt{MS_{res}\left(\frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4}\right)}} = 4{,}77$$

$4{,}9 > 1{,}729 = (t_{0.05,19})$

Άρα απορρ. την H_0